連載　オブジェクト指向と哲学
第 34 回　集合と写像

河合 昭男

前回迄「鶏と卵」と題して自己生成モデルについて考えてきました。このテーマは一旦置いておき、今回は話題を変えて、オブジェクト指向の基礎となる「クラスとインスタンス」および「クラス間の関連」を、数学の基礎となる「集合と写像」との対応関係で考えてみたいと思います。

■クラスのインスタンスは集合の要素

クラスはオブジェクトの集合と捉えることができます。集合としてみればインスタンスは集合の要素です。

x はクラス X のインスタンス　⇔　x は集合 X の要素

これを記号で表すなら次の図 1 のようになります。

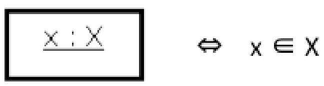


図 1　インスタンスと要素

■関連と写像

２つのクラス X と Y の間に f という関連があるとします。X から Y へ誘導可能とし、Y 側の多重度は 1 とします。X 側の多重度は任意です（図 2)。

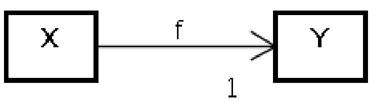


図 2　関連のモデル

このとき X の任意のインスタンス x に対して x とリンクする Y のインスタンス y が必ず存在し、y は一意です。

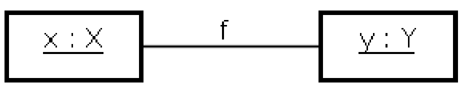


図 3　任意の x とリンクする y は一意に存在する

集合と写像で考えるなら、f は集合 X から Y への写像です。つまり図 2 のクラス図から

$\forall x \in X$ に対して $\exists 1\ y \in Y : y = f(x)$

となります。Y 側の多重度は丁度 1 でなければ写像としては定義できません。従って以上をまとめると、クラス間の関連と集合間の写像の関係は次の図 4 のようになります。

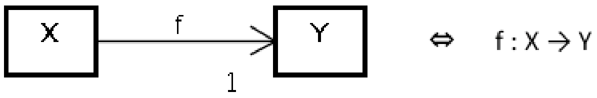


図 4　関連と写像の関係

■多重度と写像の関係

次は X 側の多重度と写像の関係を考えます。関連の多重度は写像として全射／単射／全単射の違いと関係します。

■全射 onto (surjection)

X 側の多重度を 1 以上とします。図 5 のように 1..*でも単に 2 でもかまいません。このとき写像 f : X→Y は全射となります。つまりクラス図の X 側の多重度>0 なので

$\forall y \in Y$ に対して $\exists x \in X : y = f(x)$

となり、図 5 の関係が成立します。

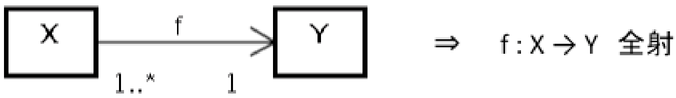
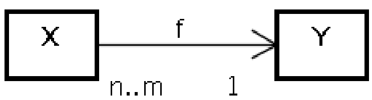


図 5　全射の例

逆は、全射であるためには

$\forall y \in Y$ に対して $\exists x \in X : y = f(x)$

となるインスタンス x が存在すればよいので、クラス X 側の多重度>0 であれば条件が満たされます。まとめると図 6 の関係が成立します。



n>0 かつ（m≧n または m=*）⇔　f : X → Y　は全射

図 6　多重度と全射の関係

■**単射** one to one (injection)

X 側の多重度を 0..1 とします。このとき写像 $f:X \to Y$ は単射となります。つまりクラス図から

$$x0 \in X, x1 \in X, x0 \neq x1 \quad \Rightarrow \quad f(x0) \neq f(x1)$$

となります。

逆に単射なら、もしも X 側の多重度>1 ならばクラス X のふたつのインスタンス x1 と x2 が Y のひとつのインスタンスとリンクすることもあるので $f(x1)=f(x2)$ となり f が単射である前提に矛盾します。

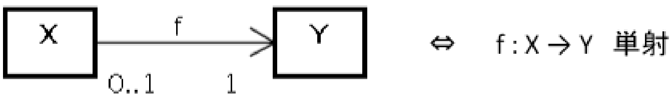


図 7　多重度と単射の関係

■**全単射** one to one, onto (bijection)

X 側の多重度も丁度 1 ならば写像 $f:X \to Y$ は全単射です。

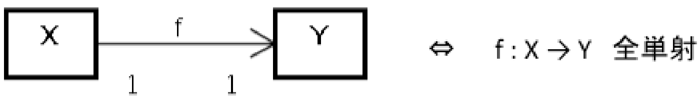


図 8 多重度と全単射の関係

→方向の証明

$\forall y \in Y$ に対して $\exists x \in X : y = f(x)$ $\therefore f$ は全射

$x0 \in X, x1 \in X, x0 \neq x1 \quad \Rightarrow \quad f(x0) \neq f(x1)$ $\therefore f$ は単射

←方向の証明

f は全射なので X 側の多重度>0

f は単射なので X 側の多重度≦1

∴X 側の多重度=1

（以下次回）

【参考書籍】

[1]瀬山士郎「なっとくする集合／位相」講談社、2001